令和７年度　研究報告書

高校数学における解析的思考を育む授業構造

指導教員　　吉村　昇　　准教授

吉井　貴寿　准教授

令和６年度入学

熊本大学大学院　教育学研究科

教職実践開発専攻　教科教育実践高度化コース

246-A9722　島本　聡志

目次

研究報告書要旨

現在、高等学校数学において、数学嫌いや数学離れが進行している状況にあり、生徒たちが数学の有用性を感じていないこと、数学の学習が模試やテスト、大学受験で高い点を取るためだけの学習になってしまっていることに問題意識を持ち、本研究をするに至った。本研究の目的は、数学の授業の中で日常生活でも扱う思考方法を育むこと、数学の魅力を感じてもらうことである。そこで、先行研究として佐々木らが進めている「解析的思考」に着目した。解析的思考には、それに対する総合的思考というものが存在する。佐々木ら（2008）は総合的思考と解析的思考を次のように定義している。「総合的思考とは、与えられたものから何を導けるかを考えることであり、解析的思考とは問題文上の求めたいものを得るには何が必要かを考えることである。したがって、解析的思考とは求めるべきものから逆向きに考え解法を探るものである。」本研究の目的を達成するために解析的思考を育む授業構造を考えることにした。

授業実践①では、同じ内容の授業を 2 クラスそれぞれで行い、一方は総合的思考を意識した授業、もう一方は解析的思考を意識した授業をそれぞれ 3 時間ずつ行った。その後、それぞれのクラスで確認テストを行い、違いを考察した。その結果、解析的思考を意識したクラスの方が、正解の数が多く、また正解まで辿り着けなくとも正しい記述を書けている生徒の数が多かった。授業実践②では、1 時間の同じ内容の授業で、授業実生①と同様に異なる授業方法をそれぞれのクラスで行った。授業実践②では、事前テストと事後テストを行い、授業前後の生徒の変化である個人比較と、授業実践①と同様のクラス比較を行った。また、授業後に簡易的なアンケートも行った。その結果、解析的思考を意識したクラスの方が事後テストでの点数が高いだけでなく、授業前後の点数の上がり幅も解析的思考を意識したクラスの方が大きかった。また、解析的思考を意識したクラスの方が、正解まで至らずともその一歩手前まで記述できている生徒の数も多かった。アンケートでは、解析的思考を意識したクラスでは、「見通しを持つことができるようになった」、「見通しの大切さに気づいた」といった記述があり、思考方法を理解したことやこの思考方法の有用性を実感している生徒が複数人見られた。これらのことから、生徒の解答での記述や考え方に影響を与え、解析的思考を育むことができた。

今後は、解析的思考のみでなく、様々な考え方を生徒にもたらしたい時に、その生徒に与えたい考え方ごとの適切な授業方法や教材の開発を行い実践していきたい。また、今回は解析的思考のみに着目したが、数学だけでなく、日常生活において、1 つの考え方のみで問題解決までに至るわけではないので、様々な考え方の取捨選択や、複数の考え方を同時に扱う手法を数学の教材を使って検討し実践につなげていきたい。

1章　はじめに

1.1 節　研究の背景

現在の高等学校数学教育における問題の 1 つに、数学嫌いや数学離れ挙げられると考える。実際に自分自信としてそうであったが、ほとんどの高校生は数学の定期テストや模試、大学受験において高い点数を取るために数学の学習を進めている。また、数学の内容の日常生活との関連の低さも数学嫌いを助長している 1 つの要因であると考える。確かに、受験数学において解法を暗記し、問題を解き、高得点を取ることに楽しさを得ることもある。しかし、数学における楽しさは、試行錯誤や問題解決過程の中にあると考える。特に、問題解決過程において「思考」「推論」「発見」するといった活動は数学における魅力の 1 つとして挙げられる。芳沢（2009）は、『近年の学生の数学嫌いを増加させている原因が、問題解決にのぞむ学生の姿勢の変化にあり、具体的には、最近の学生は問題解決過程を無視し、答えばかり求める傾向にある。この変化の理由については、受験形態がセンター試験や共通試験で「マークシート」がはびこるようになったことで数学の楽しさの 1 つである思考錯誤の活動が減り、答えを当てることができれば良くなってしまっているからである。』と述べている。また、竹内（1984）は、問題解決過程の発見する活動について、『教育において価値があることは，　子どもがこの方法を知ることというよりは、むしろこれを発見することであり、知識そのものではなくて知識を獲得する活動である』と述べている。これらのことからも、数学の問題解決過程において考え、推論し、発見する活動は重要であることが分かる。また、数学は抽象的なもので日常生活とのかかわりを見つけ出すのが難しいことは事実である。これらのことから、今回の実践では、数学の授業を通して、日常生活で活用できる「思考方法」を身に付けさせることや、数学の魅力の 1 つである「発見」する過程を生徒にもたらすことに着目する。思考や発見の方法はアルゴリズムやヒューリスティックなどさまざまであるが、その中で「思考」「推論」「発見」を含んだ逆向き推論というものに着目した。この逆向き推論を研究する中で同じような思考方法として解析的思考という思考方法に出会った。そこで今回はこの解析的思考という思考方法に着目し研究していく。逆向き推論や解析的思考に関する説明は 2 章で行うものとする。

1.2 節　研究の目的

先に述べた通り、今回の実践では日常生活でも扱う思考方法を育むこと、数学の魅力を感じてもらうことを目的に解析的思考を取り扱う。先行研究を調べていくと、そもそも逆向き推論や解析的思考に関する論文が少なかった。その中でも、解析的思考に関する論文は、析的思考がどのようなものであるか、解析的思考の有用性、教師側がどの程度解析的思考を意識した授業を行っているかなどの研究が多く、実際にどのような授業によって解析的思考が育まれるのかといった研究はほとんど見られなかった。そこで、今回の実践として「高校数学における解析的思考を育む授業構造」という題目でどのような授業によって生徒たちに解析的思考を育むことができるのかについて研究していく。

2章　先行研究

2.1節　逆向き推論

　次は、佐々木（2015）が逆向き推論について論じたものである。数学の問題解決過程における推論には、前向き推論と逆向き推論がある。今、初期状態をP(0)、目標状態をP(n)として、その間の問題状態をP(1)、P(2)、…、P(n-1)とする。前向き推論とは、初期状態から目標状態へ向かう流れで行う推論であり P(0)→ P(1)→ P(2)→ … P(n-1)→ P(n)と天下り式に推論することである。一方、逆向き推論とは、目標状態から副目標を導く推論である。例えば「目標状態 P(n)となるためにはP(n-1)であればよい」という流れである。特に高校数学の問題解決過程において、初期状態から 1 つの段階のみで目標状態へと至ることは稀であり、与えられた初期状態から前向き推論と後ろ向き推論を組み合わせて目標状態に至ることが多い。

　次は、前向き推論または逆向き推論のみで考えた場合の簡易的な例である。
今、A地点を出発しB地点C地点を経由しD地点に12時に到着したい。
A地点からB地点までは30分、B地点からC地点までは25分、C地点からD地点までは35分かかるものとする。

《前向き推論の場合》
A地点を11時に出発したとする
A地点からB地点まで30分　11：30着
B地点からC地点まで25分　11：55着
C地点からD地点まで35分　12：30着
12時に到着できていないため不適。したがって、もっと早くA地点を出発する必要がある。

《逆向き推論の場合》
C地点からD地点まで35分　11：25にC地点発
B地点からC地点まで25分　11：00にB地点発
A地点からB地点まで30分　10：30にA地点発
よって10：30にA出発

これに似た思考方法が次の解析的思考である。

2.2 節　解析的思考

2.1 節の逆向き推論に対する前向き推論のように、解析的思考にもそれに対する総合的思考というものが存在する。佐々木ら（2008）は総合的思考と解析的思考を次のように定義している。「総合的思考とは、与えられたものから何を導けるかを考えることであり、解析的思考とは問題文上の求めたいものを得るには何が必要かを考えることである。したがって、解析的思考とは求めるべきものから逆向きに考え解法を探るものである。」また、佐々木（2016）は総合的思考と解析的思考の違いについて次にように述べている。

キーワード	総合的証明	解析的証明
既知　未知	既知の事項より未知の事項に進む。	未知の事項より既知の事項に至る道を求める。
形式	A は真になり、故に B は真になり、したがって C は真になる。	C が真になることは B が真になることにより起こり、B が真になることは A が真になることにより起こる。今 A は真である、よって C は真である。
教科書	普通の教科書に持ちうるところはこれである。	普通教科書にはこの証明法を用いることは極めて稀である。
美しさ	簡明かつよく整頓されている美しい。	すこぶる複雑である。

教授	初心の教授は好んで用いる。	更に深く一層考察して教授の効力の点からみれば総合的証明は解析的証明に遠く及ばない。
証明の発見	証明の各歩みが正しいことを示す。しかし、なぜこの方法をとらなければならないのかを証明しない。また、証明の計画について告げるところがない。証明法を発見する能力を養うことがない。	証明を発見する方法を併せ持ち、生徒の証明の工夫力の進歩を促すことがはなはだ大である。
生徒	この方法によって教授させられた生徒の中には、証明法は数学者が偶然に発見した一種の術であると考え、これを機械的に記憶しようとつとめるものがあるようになり、一度これを忘れたらば、生徒は再び小手を組み立てることができず、地理上の固有名詞を忘れた場合と同じ結果になる。	この方法によると、証明はすでに発見されたものとして与えられず、生徒の目前でかつその協力によって完成される一つの補助線もその目的を示さないものはなく、それを引くようになった思想の過程を示さずに引いたものはない。生徒はこれによって単に証明を学ぶのではなく、証明法を発見する方法も併せて学ぶことができる。この方法で授けるときには真によく理解され消化された知識を与えることができる。問題も多くは独力で解くことを得るようになり、自身を持って進む。
証明	証明を簡明に述べる方法。	証明の発見方法。
中等数学	中等数学教授においては、まず解析法によって証明を発見し、その後に総合法によって整理してこれを述べるがよい。	

この総合的思考と解析的思考の定義を用いる。また、これらの総合的思考と解析的思考の特徴を前提とし、総合的思考と解析的思考を用いながら次の授業実践に入っていく。

第 3 章　授業実践①

本研究では、7 月と 12 月の 2 回に分けて授業実践を行った。以下、7 月の実践を授業実践①、12 月の実践を授業実践②として表す。授業実践①、授業実践②ともに習熟度の近い 2 クラスを対象に実践を行った。片方のクラスでは、総合的思考を意識した授業を行い、もう片方のクラスでは、解析的思考を意識した授業を行った。以下、授業実践①で総合的思考を意識した授業を行ったクラスを①-A クラス、解析的思考を意識した授業を行ったクラスを①-B クラスと表し、授業実践②で総合的思考を意識した授業を行ったクラスを②-A クラス、解析的思考を意識した授業を行ったクラスを②-B クラスと表す。授業後の 2 クラスの生徒の違いや変化を見ることによって解析的思考を育むことができたのかを分析し考察していく。

3.1 節　授業実践①の概要

授業実践①で取り扱った内容は「漸化式」である。時期としては、「漸化式」の手前の内容まで学習した後、「漸化式」の直前までの内容の期末考査が終わり、テストの返却を行った次の時間からである。授業実践①では、2 クラスそれぞれ 3 回ずつ授業を行い、3 回目の授業の最後に確認テストを行った。確認テストを行う際には、2 クラスの生徒に対して、答えまでたどり着かなくともなるべく自身の考えを記述するように伝えたうえで問題に取り組ませている。この確認テストの結果を①-A クラス、①-B クラスで比較することにより、解析的思考を育めたかどうかを分析していく。

3.2 節　授業実践①の実践

授業実践①では、①-A クラスは次のページの図 1、①-B クラスは次のページの図 2 の流れに基づいて授業を行った。

図1	図2
教科書に沿って例題を説明する	生徒と考えながら例題を解く
⇩	⇩
練習問題を解かせる	練習問題を解かせる
⇩	⇩
生徒同士話し合いを行う	生徒同士話し合いを行う
⇩	⇩
練習問題を解説する	例題と同じように解説する

図１　総合的思考を意識した授業方法　　図２　解析的思考を意識した授業方法

図２『解析的思考を意識した授業方法』の生徒と考えながら例題を解く場面では、問題を解くためには何が必要か、何の作業をする必要があるかといった問を生徒に投げかけながら生徒とともに例題を解き進めていった。また、授業実践①の 1 時間目の授業のみ授業プリントを使用し、2 クラスともに同様の授業プリントを使用したが、①-B クラスで使用した授業プリントには、図３の解析的思考を用いた「漸化式」の問題に対する考え方を追加している。

（考え方） 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めたい。

一般項を求める公式に当てはめる。

漸化式が何型か判定。

図３　解析的思考を用いた「漸化式」の問題に対する考え方

次の図 4 の例題と解答は授業実践①で実際に扱った問題の 1 つである。図 4 を用いて総合的思考による説明と解析的思考による説明の違いについて論じる。

例題　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

$$a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 2^n$$

解答　条件より　$a_n - a_{n-1} = 2^n$

数列$\{a_n\}$の階差数列の一般項が 2^n であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$$= 1 + 2^n - 2$$

よって，　$a_n = 2^n - 1$

初項は $a_1 = 1$ なので,この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって,一般項は　$a_n = 2^n - 1$

図 4　授業実践①で扱った例題とその解答

『図 4 の総合的思考による説明』

解答の 1 行目のように式を変形することにより与えられた漸化式が階差数列型であると判定することができる。

⇒階差数列型と判定することができたので、階差数列の一般項を求める公式に当てはめる。

⇒公式から一般項を求める。

このような説明を一方的に行いながら黒板に解答を作成していく。

『図 4 の解析的思考による説明』

最終的に求めたいものは一般項。　㈠

⇒授業で学習した一般項を求める公式を利用すればよい。　㈡

⇒公式を利用するために与えられた漸化式が何型かを判定する。　㈢

⇒実際に解答を作成するときは、この流れと逆向きに記述していく。

図 3 を使用しながら説明を行う。また、場面ごとに生徒に問を投げかける。㈠では、この問題で最終的に求めたいものは何か？㈡では一般項を求めるためには何が使えるか？㈢では、公式を使うためには何をする必要がある？というように生徒と共に考えながら黒板に解答を作成していく。

したがって、①- A クラスと①- B クラスの授業での主な違いは、プリントでの考え方の記載の有無、一方的に解説するか生徒とともに考えるかの解説方法の違い、総合的に考えるか解析的に考えるかの問題へのアプローチの違いの 3 点である。

3.3 節　授業実践①の分析方法と結果

授業実践①では、3 回目の授業の後にそれぞれ確認テストを行った。次ページの図 5 が確認テストで扱った問題である。この確認テストの結果をもとに分析を行っていく。

初項a,公差dの等差数列の一般項　　$a_n = a + (n-1)d$

初項a,公差dの等比数列の一般項　　$a_n = ar^{n-1}$

数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると　　$n \geqq 2$のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

上の公式を用いて次の問題を解け。

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

（1）$a_1 = 5$，$a_{n+1} = a_n + 3$

（2）$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2n - 3$

（3）$a_1 = 5$，$a_{n+1} = 3a_n - 2$

図 5　確認テストで提示した問題

まず、この確認テストの結果を次の基準で○△×の三段階で評価する。

○…答えまで導き出せている。

△…答えまでたどり着けていないが、見通しは立てられている。

×…見通しを立てられていない。

△の基準は、漸化式を判定できている、または、式を立てることができていることであり。次は、生徒の実際の解答であり、△に値するものである。次の解答を見ると、式を立てることはできているが、途中の計算を間違えてしまっている。

（２）$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2n - 3$

条件より、$a_{n+1} - a_n = 2n - 3$

数列$\{a_n\}$の階差数列の一般項が$2n-3$であるから、

$n \geqq 2$のとき$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-3) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)(n+1) - 3n + 3$

$$= (n-1)(n+1) - 3(n-1)$$

$$= (n-1)(n-2)$$

よって、$a_n = (n-1)(n-2)$

結果が次の表１である。

問題	クラス	○	△	×
1	A	１４	2	１５
	B	２１	3	8
2	A	1	6	２４
	B	2	7	２３
3	A	7	9	１５
	B	9	１０	１３

表１　授業実践①の結果　３段階

さらに、表 1 の結果を細分化し、次の基準で 5 段階評価する。

○…答えまで導き出せている。

$\triangle_1$…答えまでたどり着けていないが、はっきりとした見通しを立てることができている。

$\triangle_2$…だいたいの見通しを立てることができている。

$\times_1$…記述があるが間違い。

$\times_2$…記述なし。

$\triangle_1\triangle_2\times_1$の基準は次のとおりである。

規準に付属して、それぞれ実際の生徒の解答を記載している。また、途中で解答が終わっているものは、その記述まで生徒が実際に書いたものである

$\triangle_1$…漸化式を判定することができている。

式を立てることができている。

式を立てる際のミスをしている。

1 つ目の解答を見ると、5 と 8 を見間違えたのみで解答の流れは正しい。また、2 つ目の解答を見ると、解答の 1 行目の符号を間違えてはいるが、記述の流れは模範解答と変わらない。

（1）$a_1 = 5$，$a_{n+1} = a_n + 3$

公差が 3 で初項が 8 の等差数列なので

$$a_n = 8 + (n-1)\cdot 3$$
$$= 8 + 3n - 3$$
$$= 3n + 5$$

よって　$a_n = 3n + 5$

（2）$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2n - 3$

条件より、$a_{n+1} - a_n = 2n + 3$

数列$\{a_n\}$の階差数列の一般項が$2n + 3$であるから、

$n \geqq 2$のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) + 3(n-1)$$
$$= n(n-1) + 3n - 3$$
$$= n^2 + 2n - 3$$
$$= (n+3)(n-1)$$

よって、　$a_n = (n+3)(n-1)$

$\triangle_2$…だいたいの見通しを立てることができている。

式を立てるまでには至っていない。

1つ目の解答を見てみると、式を変形し、階差数列の漸化式であることには気づいているが、一般項を導出する式を立てることが出来ていない。

2つ目の解答では漸化式を変形する必要があることに気づき、そのための手立ても行えているが、最終的な変形までには至っていない。

（2）$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2n - 3$

$a_{n+1} - a_n = 2n - 3$より

$\{b_n\} = 2n - 3$なので

（3）$a_1 = 5$，$a_{n+1} = 3a_n - 2$

$c = 3c - 2$とすると

$-2c = -2$

$c = 1$

漸化式を変形すると

$\times_1$…記述ありだが、書いていることが間違っている。
次のどちらの解答も記述はされているが、書かれている手順が間違えていたり、この記述から何を行いたかったのかが分からない。

（2）$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2n - 3$

$a_{1+1} = a_1 + 2n - 1$
$a_2 = 2n - 2$
$a_n = n - 1$

（2）$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2n - 3$

$a_{n+1} = a_n + 2n - 3$
$c = c + 2n - 3$
$0 = 2n - 3$
$2n = -3$
$n = \frac{3}{2}$

結果が次のページの表 2 である。

問題	クラス	○	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\times_1$	$\times_2$
1	①-A	14	2	0	13	2
	②-A	21	3	0	3	5
2	①-A	1	6	0	12	12
	②-B	2	7	1	7	15
3	①-A	7	9	3	3	9
	②-B	9	10	6	1	6

表 2　授業実践①の結果　5 段階

3.4 節　授業実践①の分析と考察

まずは、表 1 から、各問題に対して分析する。（1）の問題は、等差数列が期末考査の範囲だったこともあり比較的できていた。（2）の問題では、期末考査前までに階差数列まで授業は進んでいたが、期末考査の範囲ではなかったため、復習しておらず、そもそもの階差数列の認識が甘い生徒が多かった。また、Σの計算ができない生徒が多いと感じた。（3）の問題は、確認テストの直前に授業で取り扱ったところなので（2）よりも（3）の方ができている生徒が多かった。

次に、表 1 から、①-A クラスと①-B クラスを比較することで考察する。確認テストの（1）（2）（3）の全てにおいて○△の人数が①-A クラスよりも①-B クラスのほうが多かった。また、項目ごとの差は小さいが、正しく見通しを立てることが出来ていた生徒（○と△の合計）の人数は、

（1）で①-A クラス 16 人、①-B クラス 24 人

（2）で①-A クラス 7 人、①-B クラス 9 人

（3）で①-A クラス 16 人、①-B クラス 19 人

という結果だったので、解析的思考を意識させることにより、効果が得られたのではないかと考察できる。

次に表 2 の結果をもとに考察する。$\times_1$の人数が、どの問題のおいても A クラスのほうが

多く、B クラスにはほとんど見られなかった。したがって、①-B クラスの生徒は見通しをもった記述ができている生徒が多く、①-A クラスの生徒は、与えられた問題からとりあえず解こうと、総合的思考で考えていたのではないかと考察できる。また、○△の人数は①-B クラスのほうが多かったが、記述のない生徒の数も①-B クラスのほうが多かった。よって、解析的思考を重視した授業を行うと、見通しを持てなかったときに、とりあえず何か記述しようという意識が低くなる可能性があるのではないかと考察できる。表 1 表 2 の結果をまとめると、「解析的思考を意識することで与えられたものから見通しが立ちやすくなる」、「解析的思考を用いることにより間違った記述が少なくなる」、「解析的思考を重視しすぎると見通しが立てられない場合に手を動かすことができなくなる可能性がある」ということが考えられる。

3.5 節　授業実践①の課題

解析的思考を扱ってみて、今回の授業実践①に関する課題を述べる。解析的思考を扱う場合には逆向きに考える過程を必要とするので、ある程度の記述が必要となる問題でないと使えないということを感じた。また、難しすぎる問題であると解析的に考えることができたとしても問題解決までには至らず、どのような思考を行ったか見とることができない。尚且つ、簡単すぎる問題であるとそもそも解析的に考える必要がないので、解析的思考を扱う際には問題の適切な難易度設定が必要であるということを感じた。また、数学は、次の授業では新しい内容、そのまた次の授業ではさらに新しい内容と生徒からすると常に新しいことを学習しているので、生徒の持っていた既存の考え方がどのように変化したかを見とることはとても困難である。さらに、授業で解析的思考を取り入れたからといって生徒の考え方がどのように変化したかをみとることもとても困難である。したがって、今回は授業後に確認テストを実施したが、この方法以外にも有効な分析方法を模索する必要があると実感した。

4章　授業実践②

4.1節　授業実践②の概要

授業実践②では「空間ベクトルの内積」の内容を扱った。「空間ベクトルの内積」を選んだ理由は、「平面ベクトルの内積」の内容とほとんど変わらないところにある。授業実践①で、数学は常に新しいことを学習しているので、生徒の持っていた既存の考え方がどのように変化したかを見とるのが困難であるという課題が出た。内積を学習することにおいて、平面ベクトルから空間ベクトルにおける違いは、成分が1つ増えることくらいであり、定義や公式は共通している。したがって、既存の知識である「平面ベクトルの内積」の問題への記述と授業で取り扱う「空間ベクトルの内積」の問題への記述の違いを見ることにより授業前後の生徒の変化を見とることができるのではないかと考えた。授業実践②では、2クラス1時間ずつ授業を実践し、授業の始めに「平面ベクトルの内積」の事前テスト、授業後に「空間ベクトルの内積」の事後テストを行った。これにより、総合的思考を意識した授業と解析的思考を意識した授業による違いを見るクラス比較と、それぞれの授業による事前と事後の生徒の変化を見る個人の前後比較により分析していく。時期としては、「空間ベクトルの内積」の直前の内容まで学習した後、「空間ベクトルの内積」の直前までの範囲の中間考査が終わり、テストの返却を行った次の時間である。授業実践①と同様に、事前テストと事後テストを行う際には、2クラスの生徒に対して、答えまでたどり着かなくともなるべく自身の考えを記述するように伝えたうえで問題に取り組ませている。また、事後テストには簡易的なアンケートも記載している。事前事後テストとアンケートの結果から②-A クラス、②-B クラスで比較することにより、解析的思考を育めたかどうかを分析していく。

4.2 節　授業実践②の実践

授業実践②では、②-A クラスは図 6、②-B クラスは図 7 の流れに基づいて授業を行った。

平面ベクトルの内積の復習	平面ベクトルの内積の復習
⇩	⇩
空間ベクトルの内積	空間ベクトルの内積
⇩	⇩
教科書に沿って例題を説明する	生徒と考えながら例題を解く
⇩	⇩
練習問題を解かせる	練習問題を解かせる
⇩	⇩
生徒同士話し合いを行う	生徒同士話し合いを行う
⇩	⇩
練習問題を解説する	練習問題を解説する
図 6　総合的思考を意識した授業方法	図 7　解析的思考を意識した授業方法

図 7 の『解析的思考を意識した授業方法』の生徒と考えながら例題を解く場面では、図 2 と同様に問題を解くためには何が必要か、何の作業をする必要があるかといった問を生徒に投げかけながら生徒とともに例題を解き進めていった。次の図 8 の例題と解答は授業実践②で実際に扱った問題の 1 つである。図 8 を用いて総合的思考による説明と解析的思考による説明の違いについて論じる。また、②-A クラスと②-B クラスの板書はほとんど同じようにしているが、②-B クラスの授業のみ次の図 9 の板書を追加している。

例題　3 点 A(1 , 3 , 2), B(2 , 5 , 3), C(− 1 , 5 , 6) を頂点とする△ABC において，
∠BAC の大きさを求めよ。

解答　$\overrightarrow{AB} = (2-1\,,5-3\,,3-2) = (1\,,2\,,1)$
$\overrightarrow{AC} = (-1-1\,,5-3\,,6-2) = (-2\,,2\,,4)$であるから
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times(-2)+2\times2+1\times4 = 6$
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$
$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2+2^2+4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

よって$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \angle\mathrm{BAC} \leqq 180^\circ$　であるから　　　$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$

図 8　授業実践②で扱った例題とその解答

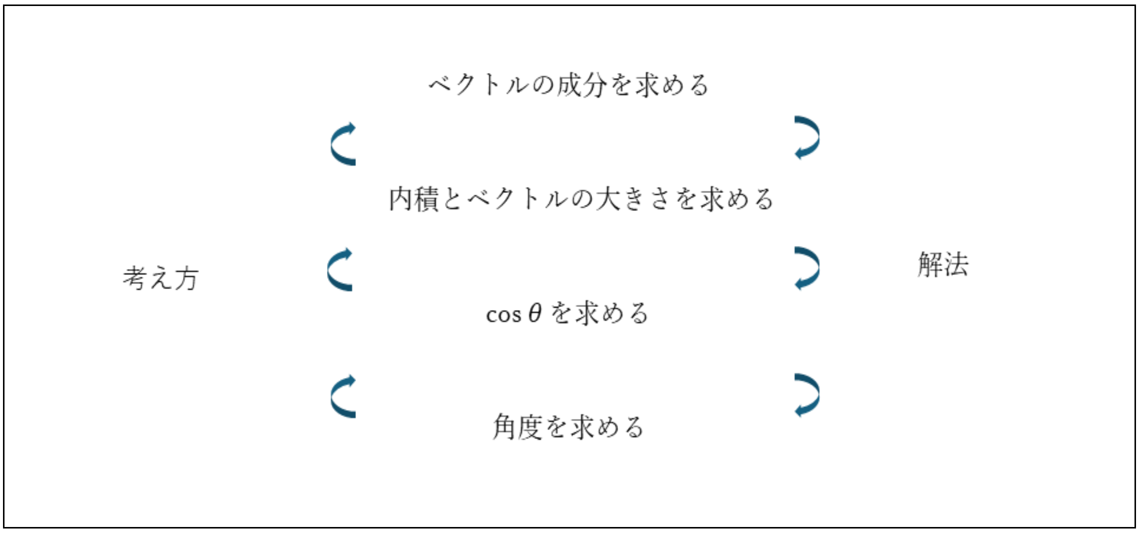

図 9　②-B クラスで板書した図

『図 8 の総合的思考による説明』
問題からベクトルの成分を求める。
⇒求めたベクトルの成分からベクトルの大きさと内積を求める。
⇒ベクトルの大きさと内積から cos θ を求める。
⇒cos θ から角度を求める。
このような説明を一方的に行いながら黒板に解答を作成していく。

『図 8 の解析的思考による説明』
最終的に求めたいものは∠BAC の角度。
⇒∠BAC を求めるためには cos∠BAC を求めればよい。
⇒cos∠BAC を求めるためにベクトルの大きさと内積が分かればよい。
⇒ベクトルの大きさと内積を求めるためには各ベクトルの成分が分かればよい。
図 9 を使用しながら説明を行う。また、①-B クラスと同様に生徒に問を投げかけ、生徒と共に考えながら黒板に解答を作成していく。

したがって、②- A クラスと②- B クラスの授業での主な違いは、板書での考え方の記載の有無、一方的に解説するか生徒とともに考えるかの解説方法の違い、総合的に考えるか解析的に考えるかの問題へのアプローチの違いの 3 点である。

4.3 節　授業実践②の分析方法と結果

授業実践②では、授業の前後にそれぞれ事前テストと事後テストを行った。事前テストから事後テストへの問題の変化は、成分を 1 つ追加し扱う数を変更したのみであり、解き方や用いる公式は全く同じである。次の図 10 が事前テスト、図 11 が事後テストでそれぞれ扱った問題である。 1 問目、 2 問目は授業で取り扱う問題の数を変えたものであり、 3 問目は教科書には記載されていない、生徒からすると未知の問題である。また、事後テストには簡易的なアンケートも記載している。後の図 12 がアンケート内容である。この確認テストとアンケート結果をもとに分析を行っていく

1．次の 2 つのベクトル $\vec{a}=\left(\sqrt{3},\ -1\right)$,$\vec{b}=(-1,\ \sqrt{3})$の内積となす角 θ を求めよ。

2．3 点 A$(-1,\ 2)$,B$(3,\ -2)$,C$(\sqrt{3},\ \sqrt{3}+1)$を頂点とする△ABC において,∠BAC の大きさを求めよ。

3．$\vec{a}=(0,\ 2)$と$\vec{b}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\ p)$のなす角が 60°のとき，$p$の値を求めよ。

図 10　事前テストで扱った問題

1．2 つのベクトル$\vec{a}=(2,\ -1,\ -2)$,$\vec{b}=(4,\ 3,\ -5)$について内積とそのなす角 θ を求めよ。

2．　3 点$A(1,\ 3,\ 2)$,$B(2,\ 5,\ 3)$,$C(-1,\ 5,\ 6)$を頂点とする△ABC において,∠BAC の大きさを求めよ

3．　$\vec{a}=(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2)$と$\vec{b}=(-1,\ p\ \ \sqrt{2})$のなす角が 60°のとき，$p$の値を求めよ

図 11　事後テストで扱った問題

1

1. 今回の授業内容を理解できましたか？　　　1　2　3　4　5 2. 授業で扱った問題と同様の問題がでた場合に,答えまで出せなくとも見通しを立てることができますか？ 1　2　3　4　5 3. 平面ベクトルの同じ単元の学習と比べて理解度に違いはありますか？　ある　ない 4.（2 であると回答した方は）どのような違いがありますか？   5. 今回の授業で感じたことを自由に記述してください。

図 12　事後テストに記載したアンケート

事前テストと事後テストともに授業実践①と同様の基準で次の 5 段階で評価する。

〇…答えまで導き出せている。

$\triangle_1$…答えまでたどり着けていないが、はっきりとした見通しを立てることができている。

$\triangle_2$…だいたいの見通しを立てることができている。

$\times_1$…記述があるが間違い。

$\times_2$…記述なし。

また、授業実践①と同じように、それぞれ基準ごとの実際の生徒の解答を記載している。また、途中で解答が終わっているものは、その記述まで生徒が実際に書いたものである

$\triangle_1$…答えまでたどり着けていないが、はっきりとした見通しを立てることができている。1 つ目の生徒の解答では、解答の流れはほとんど模範解答と同じであり、最後の式からの変形のみできていない。2 つ目の解答では、最後から 4 行目の計算を間違えたのみで、他はすべてあっている。

3.　$\vec{a}=(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2)$と$\vec{b}=(-1,\ p\ \ \sqrt{2})$のなす角が 60°のとき，$p$の値を求めよ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}p+2\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}p+\sqrt{2}$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{2+2+4}=2\sqrt{2} \qquad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{1+p^2+2}=\sqrt{3+p}$$

よって

$$(\sqrt{2}\cdot p+\sqrt{2})/(2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+p})=1/2$$
$$2\sqrt{2}\cdot p+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+p}$$
$$2\sqrt{2}(p+1)=2\sqrt{6+2p}$$
$$p+1=2\sqrt{6+2p}/2\sqrt{2}$$

2.　3 点$A(1,\ 3,\ 2), B(2,\ 5,\ 3), C(-1,\ 5,\ 6)$を頂点とする△ABC において,∠BAC の大きさを求めよ

$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ 1) \qquad \overrightarrow{AC}=(-2,\ 2,\ 4)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+4+4=6$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\cos\angle BAC=6/\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}$

$\cos\angle BAC=1/\sqrt{2}$

$0^\circ \leqq \angle BAC \leqq 180^\circ$ より

$\angle BAC=45^\circ$

$\triangle_2$…だいたいの見通しを立てることができている。
1つ目の生徒の解答では、与えられたものからできることは行っているが、それらを用いて次何をすればよいのかわかっていない。2つ目の生徒の解答では,解答の手順は問題ないが、そもそもの求めたい角度を間違っていたり問題文にない θ が急に出てきていたりするのでこの評価としている。

3. $\vec{a} = (\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2)$ と $\vec{b} = (-1,\ p\ \ \sqrt{2})$ のなす角が 60° のとき，p の値を求めよ

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}p + 2\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}p + \sqrt{2}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2+2+4} = 2\sqrt{2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1+p^2+2} = \sqrt{3+p}$$

2. 3 点 $A(1,\ 3,\ 2)$, $B(2,\ 5,\ 3)$, $C(-1,\ 5,\ 6)$ を頂点とする△ABC において,∠BAC の大きさを求めよ

$\overrightarrow{AB} = (1,\ 2,\ 1)$　　$\overrightarrow{BC} = (-3,\ 0,\ 3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -3+0+3 = 0$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$0/\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} = 0$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より

$\theta = 90°$

$\times_1$…記述があるが間違い。
次の生徒の解答では、一行のみ記述があったが、そもそも$\cos\theta$からθを導出することができていない。しかし、完全な白紙ではないためこの評価としている。

3.　$\vec{a} = (\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2)$と$\vec{b} = (-1,\ p\ \ \sqrt{2})$のなす角が 60°　のとき，$p$の値を求めよ $\theta = 3/2$

次のページの表 3 表 4 は、②-A クラスと②-B クラスの事前テストから事後テストへの問題ごとの 5 段階評価の変化である。

②-A	1	2	3
○	12⇒27	0⇒22	0⇒0
△ 1	6⇒3	0⇒0	2⇒8
△ 2	7⇒1	4⇒4	2⇒11
× 1	8⇒1	2⇒1	0⇒2
× 2	0⇒1	27⇒6	29⇒12

表 3　②-A クラスの各問題の 5 段階評価の変化

②-B	1	2	3
○	12⇒29	2⇒26	0⇒0
△ 1	8⇒2	1⇒2	2⇒13
△ 2	7⇒0	10⇒2	1⇒10
× 1	3⇒0	7⇒1	3⇒1
× 2	1⇒0	11⇒0	25⇒7

表 4　②-B クラスの各問題の 5 段階評価の変化

また次の表 5 表 6 は前のページの表 3 表 4 のそれぞれの値をそのクラスの人数で割った割合である。

②-A	1	2	3
〇	36.3⇒81.8	0⇒66.7	0⇒0
△1	18.2⇒9.1	0⇒0	6.1⇒24.2
△2	21.2⇒3.0	12.1⇒12.1	6.1⇒33.3
×1	24.2⇒3.0	6.1⇒3.0	0⇒6.1
×2	0⇒3.0	81.8⇒18.2	87.9⇒36.4

表 5　表 3 を割合で表したもの

②-B	1	2	3
〇	38.7⇒93.5	6.5⇒83.9	0⇒0
△1	25.8⇒6.5	3.2⇒6.5	6.5⇒41.9
△2	22.6⇒0	32.2⇒6.5	3.2⇒32.3
×1	9.7⇒0	22.6⇒3.2	9.7⇒3.2
×2	3.2⇒0	35.5⇒0	80.6⇒22.6

表 6　表 4 を割合で表したもの

また、各問題 3 点満点として、評価の〇を 3 点、△$_1$を 2 点、△$_2$を 1 点、$\times_1\times_2$を 0 点とする。したがって、すべて〇だった場合、9 点満点のテストとなる。次の表 7 表 8 は、②-A クラスと②-B クラスのそれぞれの事前テストから事後テストへの合計点と平均点の変化を表したものである。

②-A	1	2	3	合計	最大
合計	55⇒88	4⇒70	6⇒27	65⇒185	99　297
平均	1.67⇒2.67	0.12⇒2.12	0.18⇒0.82	1.97⇒5.61	3　9

表 7　②-A クラスの事前事後の合計点と平均点の変化

②-B	1	2	3	合計	最大
合計	59⇒91	18⇒84	5⇒36	82⇒211	93　279
平均	1.9⇒2.94	0.58⇒2.71	0.16⇒1.16	2.64⇒6.81	3　9

表 8　②-B クラスの事前事後の合計点と平均点の変化

また、次の表 9 表 10 は、②-A クラスと②-B クラスの$\triangle_1\triangle_2\times_1\times_2$から 1 つ以上上の段階に上がった人数とその割合を表したものである。($\times_2\Rightarrow\times_1$は除く)

②-A	1	2	3
人数	17	25	17
割合	51.5	75.8	51.5

表 9　②-A クラスの 1 つ以上評価が上がった人数と割合

②-B	1	2	3
人数	18	27	22
割合	58.1	87.1	71.0

表 10　②-B クラスの 1 つ以上評価が上がった人数と割合

次の図 12 が事後テストの際に記載したアンケートである。このアンケートの②-A クラスと②-B クラスの項目 1 から項目 3 の人数と割合を示したものが次の表 11 表 12 である。

1. 今回の授業内容を理解できましたか？　1　2　3　4　5

2. 授業で扱った問題と同様の問題がでた場合に,答えまで出せなくとも見通しを立てることができますか？

1　2　3　4　5

3. 平面ベクトルの同じ単元の学習と比べて理解度に違いはありますか？　ある　ない

4. (3 であると回答した方は) どのような違いがありますか？

5. 今回の授業で感じたことを自由に記述してください。

図 12　事後テストに記載したアンケート

次の表 11 表 12 は図 12 のアンケートの結果である。

②-A	1	2	3	4	5
1	0	1 人 3.0%	2 人 6.1%	10 人 30.3%	20 人 60.6%
2	0	1 人 3.0%	5 人 15.2%	14 人 42.4%	13 人 39.4%
	ある			ない	
3	5 人　15.2%			28 人　84.8%	

表 11　②-A クラスのアンケート結果

②-B	1	2	3	4	5
1	0	0	0	9 人 29.0%	22 人 71.0%
2	0	0	1 人 3.2%	14 人 45.2%	16 人 51.6%
	ある			ない	
3	8 人　25.8%			23 人　74.2%	

表 12　②-B クラスのアンケート結果

次は、アンケート項目 4（項目 3 で平面ベクトルの同じ単元と比べて理解度に違いがあったと回答した生徒がどのような違いがあったと感じたか）での生徒の記述の一部である。

◦②-A クラス

・分かりやすかった。

◦②-B クラス

・問題を解く前に見通しを立てられるようになった。

・解き方を理解できた。

・順を追って解けるようになった。

また、次は、アンケート項目 5（自由記述）での生徒の記述の一部である。

◦②-A クラス

・声が聞き取りやすかった。

・板書が見やすかった。

◦②-B クラス

・見通しを立てることで計算途中に次何をするべきか分からなくなることがなくなる。

・見通しの大切さに気付いた。

・問題に見通しを持つことでより解きやすくなると感じた。

4.4 節　授業実践②の分析と考察

まずは事前事後テストの結果、特に表 5 表 6 から考察する。事後テストの 1 問目はどちらのクラスもほとんどの生徒が正解またはその手前まで解くことができていたので、授業実践①の課題であったように、簡易的な問題の場合では違いがあまり見られないことが分かる。事後テストの 2 問目では②- B クラスの方が〇の割合が 17.2%多く、また、②- B クラスの場合では白紙の生徒が 0 人であり、間違いの記述をした生徒は 1 人だった。このことから、授業で扱った問題であるが②-A クラスと②-B クラスで理解度に違いが見られたことが分かる。したがって、解析的思考を育ませることにより見通しを立てることができ、逆に、総合的思考を意識した授業では解析的思考を意識した授業よりも考え方が身についていない生徒が多かったのではないかと考えられる。3 問目に関しては、事前テストと事後テストを通して②-A クラス、②-B クラスともに完全な正解までは至っている生徒はいなかった。

しかし、事後テストでは、最後の計算の手前まで記述できている生徒の割合が②-B クラスの方が 17.7%多かった。また、白紙の割合が②-B クラスの方が 14.2%少なかった。したがって、生徒には未知の問題であったが、②-B クラスの生徒は問題の意図をしっかり理解し、見通しを立てることができる生徒が多かったと考察できる。また、総合的思考を意識した授業を行うと、未知の問題に出会ったときに見通しを立てることができず、手が動かない生徒が多くなると考えられる。次に表 7 から表 10 をもとに考察する。最終的な各問題の平均点と授業の事前と事後で評価が 1 つ以上上の段階に上がった生徒の割合は②-B クラスの生徒の方が常に多かった。また、事前テストの点数は②-A クラスと②-B クラスで同程度か②-B クラスの方が少々高かったが、事前テストから事後テストの平均点の上がり幅は②-B クラス方がすべての問題で大きくなっていた。尚且つ、平均点も評価が 1 つ上の段階上がった生徒も②-B クラスの 3 問目の問題が最も差が大きい結果となった。このことから、見通しを持つことができた生徒が②-B クラスの方が多いと分かり、解析的思考を育ませることができたのではないかと考察できる。また、未知の問題への対応力に違いが見られたことより、授業方法の違いから授業で取り扱う問題の理解度に差がつくことだけでなく、解析的思考を意識させることで、未知の問題への対応力も向上させることができると考えられる。最後にアンケート結果から考察する。表 11 表 12 から②- B クラスの生徒は授業を理解した、同じような問題が出たときに見通しを立てることができると実感している生徒が多かった。また、平面ベクトルの内積の内容と比べて理解度に違いがあると回答した生徒の記述を見ると、②- A クラスの回答は抽象的に書かれていることに対して、②- B クラスの回答は具体的に問題に対するアプローチが変化したということを記述している。また、自由記述に関して、②- A クラスの回答は授業内容や授業方法とは関係のない記述であるのに対して、②- B クラスの回答は見通しを立てることの意義や重要性を理解している記述となっている。これらのことから、②-B クラスでは解答だけでなく思考方法も教えているので②-A クラスと②-B クラスで理解度に差が生まれたのではないかと推測できる。かつ、②- B クラスの事後テストの点数が上がっただけでなく、理解したと実感できているということは、解析的思考を育むことにより問題を深く自分に落とし込むことができていると考えられる。また、②-B クラスの自由記述では、見通しという言葉が多くみられた。授業実践②は 1 時間のみの授業であり、教師側から授業中に「見通し」という言葉を発したのは数回であったが、問題の解説のたびに解析的思考を意識させたことで、強くこの思考方法を印象付けることができたと考えられる。

4.5 節　授業実践②の課題

授業実践①と同様に、解析的思考を取り扱う際の適切な難易度の問題設定の必要性を感じた。また、今回の授業実践①授業実践②では、①-A クラスと②-A クラスでは総合的思考のみ、①-B クラスと②-B クラスでは解析的思考のみを極端に意識しながら授業を行ったが、実際に問題を解くときには解析的思考のみを使うわけではないので、総合的思考と解析的思考の両立が必要であり、授業の際に問題を解く中でうまく取捨選択する必要があると感じた。今回の授業実践②では、1 時間のみの授業の比較により分析を行ったが、数時間の授業の後に確認テストやアンケートを行う方がより違いを顕著に見ることができたのではないかと考えた。また、今回の実践では、事前事後のテストとアンケートにより結果分析を行ったが、生徒が解析的思考を意識した授業と総合的思考を意識した授業の後に問題を解いている手元の様子をそれぞれ撮影し、解き進め方の違いを見るというような他のより有意義な実践方法を模索する必要があると感じた。

5章　おわりに

5.1節　研究のまとめ

授業実践①と授業実践②を振り返り、本研究の総括を述べる。授業実践を行うにあったて、生徒に解析的思考を意識させるにはどうすればよいかということについて深く考えた。生徒側からすると、解析的思考という言葉をまず知らない。かつ、今自分は解析的思考を行っているという実感を生徒に与えることは甚だ難しい。したがって、授業をすることによって解析的思考が身についたという実感を与えることは難しいと感じた。そこで、解析的思考という言葉は使わずに、数学の問題の解答の中に解析的思考を落とし込むことで生徒の解析的思考を育む授業を行おうと考えた。数学において、解法ではなく思考方法を 1 時間の授業のみで身につけさせるのは困難であり、数時間の授業の中で徐々に身に付けさせる必要がある。しかし、その中で授業実践②の 1 時間の授業で授業の中で扱った問題に限らず、見通しを持てるようになったという実感を持てた生徒が複数人いたことは成果として挙げられると考える。また、授業実践のテストのクラス比較の結果やアンケートから解析的思考を意識した授業を行ったクラスの方が理解度が高かったことが分かる。したがって、解法を逆向きに考えながら生徒とともに解法を作っていくことや、その考え方を視覚的に表すことによって生徒の解析的思考を育めたのではないかと考える。しかし、やはり実際に様々な数学の問題を解いていく場合には、総合的思考または解析的思考の一方の思考方法だけを用いるわけではないので、場面にあった思考方法や双方向的な考え方を生徒に与える必要がある。

5.2節　今後の展望

今回は解析的思考を育ませたいという意識で授業実践を行ったが、目的や問題により身に付けさせたい力は異なるので、身に付けさせたい力があった時にその力を身に付けさせる手立てもその要所ごとに考えなければならない。また、今回は、解析的思考を育む授業がどのようなものかを研究するために、総合的思考と解析的思考の一方を強く意識した授業を行ったが、問題によって思考方法が異なるだけでなく、同じ問題であってもその問題を解く人によってアプローチ方法が異なるので、1 つの考えにとどまらず、複数の考え方からその生徒がうまく活用できるような指導方法を模索する必要があると感じた。また、今回の実

践では、生徒たちに解析的思考を育む授業構造は見えてきたが、そこから数学の有用性を感じさせることや、日常生活でも活用できる考え方であると生徒が感じることができたかというとそうとは言えない。また、今回の授業実践が数学嫌いや数学離れの解消につながったかというとこれも言えないと考える。したがって、今後は数学の 1 時間 1 時間の授業の中で徐々に数学の有用性を感じさせ、生徒の数学嫌い、数学離れの解消につなげていきたい。

引用・参考文献

１．高等学校数学における「解析的思考」の指導に関する調査研究

（小林徹也 磯田正美　2008）

２．高等学校数学における解析と総合に関する実証的研究　－生徒の問題解決過程に着目して－　（小林徹也　2016）-

３．高校数学の解析指導における実践的研究 －２次関数・方程式の統合を焦点に－

（星 健太　2018）

４．数学学習における後ろ向き推論例題の効果

（佐々木隆宏　2014）

５．高等学校数学の問題解決過程における発見について　－逆向き推論を視点－

（佐藤 智）

６．解析的思考の必要性を実感させる授業づくり －「ぶどう算」を利用した文字式の説明の導入授業を通して－　（加藤幸太）

７．高等学校数学教育における解析的思考と別解に関する研究

（小林徹也　2011）